PROBLEME.

UN CORPS ÉTANT ATTIRÉ EN RAISON RÉCIPROQUE QUARRÉE DES DISTANCES VERS DEUX POINTS FIXES DONNÉS, TROUVER LES CAS OU' LA COURBE DÉCRITE PAR CE CORPS SERA ALGÉBRIQUE,

RE'SOLU PAR M. EULER.

Voilà un probleme qui paroit aussi important que difficile. On convient aujourd'hui, que l'Astronomie seroit portée au plus haut degré de perfection, si l'on trouvoit moyen de déterminer le mouvement de trois corps, qui s'attirent mutuellement en raison réciproque quarrée des distances. Mais tous les soins que les Géometres ont apportés jusqu'ici pour cet effet ont été inutiles; ils y ont rencontré du côté de l'Analyse des obstacles invincibles, malgré les grands progrès qu'on a déjà faits dans cette étude. Donc tous les pas qu'on puisse faire pour approcher de ce grand but, seront très importans. C'est dans cette vue, que je me suis appliqué à la question, où deux corps étant supposés fixes, on demande le mouvement d'un troisieme, qui y seroit attiré suivant la loi mentionnée. Je crois que tous ceux, qui voudront entreprendre la solution de ce probleme, y trouveront des difficultés, qui leur paroitront presque aussi insurmontables, que dans le grand probleme fondamental de l'Astronomie. Du moins, tant qu'on ne sauroit surmonter ces moindres difficultés, on espéreroit en vain de surmonter les plus grandes. Or c'est après bien des essais inutiles, que je suis enfin parvenu à la solution de ce dernier probleme par un hazard occasionné par une erreur singuliere qui m'y a conduit. Ayant trouvé cette solution j'ai remarqué, que parmi

parmi l'infinie variété des courbes, que le corps attiré vers deux centres fixes peut décrire, ſelon la viteſſe & direction qui lui aura été imprimée au commencement; il y a des courbes algébriques, dont la recherche demandant une addreſſe tout nouvelle de l'Analyſe, me paroit à tous égards digne de l'attention des Géometres, & c'eſt le ſujet du probleme que je me propoſe de traiter.

Pour y réuſſir il faut expédier les articles ſuivans:

Premierement, il faut chercher les formules différentio-différentielles, qui renferment en général la détermination du mouvement du corps.

En ſecond lieu, il faut intégrer ces formules pour avoir des équations différentielles du premier degré, qui contiennent les loix du mouvement.

En troiſieme lieu, il faut ramener ces équations à la ſéparation des variables, pour conſtruire le probleme par des quadratures.

En quatrieme lieu enfin, il s'agit de déterminer les cas, où la courbe décrite devient algébrique.

Ces quatre articles, dont je développerai chacun ſéparément, meneront à la ſolution du probleme propoſé.

PREMIER ARTICLE.

1. Soient A & B les deux centres de force, & qu'un corps à la diſtance $= z$ ſoit attiré vers A par la force $= \frac{A}{zz}$, & vers B par la force $= \frac{B}{zz}$, de ſorte que A & B marquent la vertu attractive abſolue de ces deux centres. Soit outre cela leur diſtance AB $= a$, & que le corps attiré par ces deux centres, du mouvement duquel il eſt queſtion, ſe trouve à préſent en M. Nommons Planche VI Fig. 1.

ſes

ſes diſtances aux centres de forces AM $= v$, & BM $= u$, les angles BAM $= \zeta$, & ABM $= \eta$, de ſorte que

$$v = \frac{a \sin \eta}{\sin(\zeta + \eta)}, \quad \& \quad u = \frac{a \sin \zeta}{\sin(\zeta + \eta)}.$$

Ayant tiré de M à AB la perpendiculaire MP, poſons outre cela AP $= x$, & PM $= y$, & nous aurons:

$$x = v \cos \zeta; \quad y = v \sin \zeta = u \sin \eta, \quad \& \ \mathrm{BP} = a - x = u \cos \eta.$$

2. Cela poſé, le corps M étant attiré vers A par la force $= \frac{A}{vv}$, la décompoſition de cette force donne pour la direction AP la force $= -\frac{Ax}{v^3} = -\frac{A \cos \zeta}{vv}$, & pour la direction PM la force $= -\frac{Ay}{v^3} = -\frac{A \sin \zeta}{vv}$. Enſuite l'attraction du centre B dont la force eſt $= \frac{B}{uu}$ donne par une ſemblable décompoſition pour la direction AP la force $= + \frac{B(a - x)}{u^3} = + \frac{B \cos \eta}{uu}$, & pour la direction PM la force $= - \frac{By}{u^3} = - \frac{B \sin \eta}{uu}$, de ſorte que le corps M eſt ſollicité ſelon les directions fixes de nos coordonnées AP & PN en tout:

$$\text{ſelon AP par la force} = -\frac{Ax}{v^3} + \frac{B(a + x)}{v^3},$$

$$\text{ſelon PM par la force} = -\frac{Ay}{v^2} - \frac{By}{u^3}.$$

Il eſt évident que je parle ici des forces accélératrices, & que je ſuppoſe le mouvement du corps M ſe faire dans le même plan avec les centres de forces A & B.

3. Soit

3. Soit maintenant l'élément du tems $= dt$, qui étant pris pour constant, les principes de Mécanique nous fournissent ces deux équations différentio-différentielles:

$$ddx = 2g\,dt^2\left(-\frac{Ax}{v^3}+\frac{B(a-x)}{u^3}\right)$$

$$ddy = 2g\,dt^2\left(-\frac{Ay}{v^3}-\frac{By}{u^3}\right),$$

où g marque une certaine constante introduite pour ramener les conclusions à des mesures absolues. Mais, comme ici il ne s'en agit point, il n'est pas nécessaire d'expliquer ce qui regarde la valeur de cette lettre g, il suffit de la regarder en général comme une constante.

SECOND ARTICLE.

4. Pour trouver les intégrales de ces deux équations différentielles du second degré, je remarque d'abord que, puisque

$$vv = xx + yy, \qquad \& \; uu = (a-x)^2 + yy,$$

il y a, en différentiant:

$$v\,dv = x\,dx + y\,dy; \quad \& \; u\,du = -(a-x)\,dx + y\,dy.$$

Donc, multipliant la premiere équation par $2\,dx$ & l'autre par $2\,dy$, leur somme donnera:

$$2dx\,ddx + 2dy\,ddy = 4g\,dt^2\left(-\frac{A(x\,dx+y\,dy)}{v^3}-\frac{B(-(a-x)dx+y\,dy)}{u^3}\right),$$

qui se réduit à cette équation intégrable:

$$2\,dx\,ddx + 2\,dy\,ddy = 4g\,dt^2\left(-\frac{A\,dv}{vv}-\frac{B\,du}{uu}\right),$$

dont l'intégrale est évidemment:

$$dx^2 + dy^2 = 4g\,dt^2\left(\frac{A}{v}+\frac{B}{u}+\frac{C}{a}\right),$$

où C est une constante introduite pour rendre l'intégrale complette.

5. Si

5. Si l'on veut, outre les diſtances v & u, introduire les angles ζ & η, à cauſe de

$$dx = dv\cos\zeta - vd\zeta\sin\zeta, \quad \& \quad dy = dv\sin\zeta + vd\zeta\cos\zeta,$$

on aura

$$dx^2 + dy^2 = dv^2 + vvd\zeta^2,$$

& encore par une ſemblable maniere:

$$dx^2 + dy^2 = du^2 + uud\eta^2,$$

où il faut remarquer que $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ marque l'élément de la courbe, décrit pendant le tems dt; & partant le quarré de la viteſſe, que le corps aura en M, ſera proportionnel à cette formule $\frac{A}{v}+\frac{B}{u}+\frac{C}{a}$. Au reſte l'équation trouvée dans le §. précédent ſera

$$dv^2 + vvd\zeta^2 = 4gdt^2\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right).$$

6. Mais, ayant deux équations différentio-différentielles, il en faut chercher encore une intégrale, ce qui ne paroit pas ſi aiſé. Pour cet effet je change les équations principales dans les formes ſuivantes:

$$xddy - yddx = 2gdt^2\left(-\frac{Bay}{u^3}\right) = -2gBadt^2.\frac{\sin\eta}{uu},$$

$$(a-x)ddy + yddx = 2gdt^2\left(-\frac{Aay}{v^3}\right) = -2gAdt^2.\frac{\sin\zeta}{vv},$$

où je remarque que $xddy - yddx$ eſt le différentiel de $xdy - ydx$, & $(a-x)ddy + yddx$ le différentiel de $(a-x)dy + ydx$. Or, puiſque $x = v\cos\zeta$, & $y = v\sin\zeta$, nous avons $xdy - ydx = vvd\zeta$, & puiſque $a - x = u\cos\eta$, & $y = u\sin\eta$, nous avons $(a - x)dy + ydx = uud\eta$, d'où nous tirons ces deux équations:

$$d(vvd\zeta) = -2gBadt^2.\frac{\sin\eta}{uu}, \quad \& \quad d(uud\eta) = -2gAadt^2.\frac{\sin\zeta}{vv}.$$

7. Mul-

7. Multiplions-en la premiere par $uudy$, & l'autre par $vvd\zeta$, pour avoir leur somme

$$uud\eta.d(vvd\zeta)+vvd\zeta.d(uud\eta)=+2gadt^2(-Ad\zeta\sin\zeta-Bd\eta\sin\eta),$$

dont l'intégration fournit:

$$vvuud\zeta d\eta = 2gadt^2(A\cos\zeta+B\cos\eta+D),$$

qui étant jointe à celle que nous venons de trouver

$$dv^2+vvd\zeta^2=4gdt^2\left(\frac{A}{v}+\frac{B}{u}+\frac{C}{a}\right),$$

renferme la détermination du mouvement. Or maintenant il est aisé d'en éliminer l'élément du tems dt, d'où nous parviendrons à cette équation

$$a(dv^2+vvd\zeta^2)(A\cos\zeta+B\cos\eta+D) = 2vvuud\zeta d\eta\left(\frac{A}{v}+\frac{B}{u}+\frac{C}{a}\right),$$

qui exprime la nature de la courbe décrite par le corps M indépendamment du tems.

TROISIEME ARTICLE.

8. Pour intégrer cette équation, si cela se pouvoit, ou pour en trouver seulement la construction, il faut observer qu'elle ne contient en effet, que deux variables, puisque les angles ζ & η, dépendent des distances v & u, & réciproquement. Si nous en voulions éliminer les angles ζ & η, nous parviendrions à cette équation entre v & u.

$$((vdv-udu)(udv-vdu)+aadvdu)\left(\frac{A(aa+vv-uu)}{v}+\frac{B(aa+uu-vv)+2Da}{u}\right)=$$
$$((aa-vv-uu)dv+2uvdu)((aa-vv-uu)du+2uvdv)\left(\frac{A}{v}+\frac{B}{u}+\frac{C}{a}\right).$$

Mais

Mais je crains fort que toutes les peines ne feroient inutiles; qu'on voudroit bien se donner pour résoudre cette équation si embarrassée, où même les différentiels dv & du montent à deux dimensions.

9. Il vaudra donc mieux éliminer les distances v & u par les formules $v = \frac{a \sin \eta}{\sin(\zeta + \eta)}$, & $u = \frac{a \sin \zeta}{\sin(\zeta + \eta)}$. Or, pour la formule $dv^2 + vv d\zeta^2 = dx^2 + dy^2$, servons-nous plutôt des expressions

$$x = v \cos \zeta = \frac{a \cos \zeta \sin \eta}{\sin(\zeta + \eta)}, \quad \& \ y = v \sin \zeta = \frac{a \sin \zeta \sin \eta}{\sin(\zeta + \eta)},$$

d'où nous tirons par la différentiation

$$dx = \frac{-a d\zeta \sin \eta \cos \eta + a d\eta \sin \zeta \cos \zeta}{\sin(\zeta + \eta)^2}, \quad \&$$

$$dy = \frac{a d\zeta \sin \eta^2 + a d\eta \sin \zeta^2}{\sin(\zeta + \eta)^2},$$

& en ajoutant les quarrés, nous aurons:

$$dx^2 + dy^2 = \frac{aa(d\zeta^2 \sin \eta^2 + d\eta^2 \sin \zeta^2 - 2 d\zeta d\eta \sin \zeta \sin \eta \cos(\zeta + \eta))}{\sin(\zeta + \eta)^4},$$

qu'il faut multiplier par $a(\mathrm{A} \cos \zeta + \mathrm{B} \cos \eta + \mathrm{D})$ pour avoir le premier membre de notre équation.

10. Ensuite, ayant $vvuu = \frac{a^4 \sin \zeta^2 \sin \eta^2}{\sin(\zeta + \eta)^4}$, nous aurons $2vvuu\, d\zeta\, d\eta = \frac{2a^4 d\zeta\, d\eta \sin \zeta^2 \sin \eta^2}{\sin(\zeta + \eta)^4}$, qu'il faut multiplier par

$$\left(\frac{\mathrm{A} \sin(\zeta + \eta)}{\sin \eta} + \frac{\mathrm{B} \sin(\zeta + \eta)}{\sin \zeta} + \mathrm{C}\right) \frac{1}{a},$$

pour

pour avoir le second membre de notre équation, lequel sera par conséquent:

$$\frac{2a^3\,d\zeta\,d\eta\sin\zeta\sin\eta}{\sin(\zeta+\eta)^4}(A\sin\zeta\sin(\zeta+\eta)+B\sin\eta\sin(\zeta+\eta)+C\sin\zeta\sin\eta),$$

qui doit être égal à

$$\frac{a^3(d\zeta\sin\eta^2+d\eta^2\sin\zeta^2-2\,d\zeta\,d\eta\sin\zeta\sin\eta\cos(\zeta+\eta))}{\sin(\zeta+\eta)^4}(A\cos\zeta+B\cos\eta+D).$$

Divisons de part & d'autre par $\frac{a^3}{\sin(\zeta+\eta)^4}$, & nous aurons

$$(d\zeta^2\sin\eta^2+d\eta^2\sin\zeta^2-2\,d\zeta\,d\eta\sin\zeta\sin\eta\cos(\zeta+\eta))(A\cos\zeta+B\cos\eta+D)=$$
$$2\,d\zeta\,d\eta\sin\zeta\sin\eta(A\sin\zeta\sin(\zeta+\eta)+B\sin\eta\sin(\zeta+\eta)+C\sin\zeta\sin\eta),$$

qui se réduit à cette forme plus simple:

$$(d\zeta^2\sin\eta^2+d\eta^2\sin\zeta^2)(A\cos\zeta+B\cos\eta+D)=$$
$$2\,d\zeta\,d\eta\sin\zeta\sin\eta\,(A\cos\eta+B\cos\zeta+C\sin\zeta\sin\eta+D\cos(\zeta+\eta)).$$

11. Puisque $\cos(\zeta+\eta)=\cos\zeta\cos\eta-\sin\zeta\sin\eta$, posons $C-D=E$, de sorte que $C=D+E$, & notre équation sera représentée en sorte

$$d\zeta^2\sin\eta^2+d\eta^2\sin\zeta^2=2\,d\zeta\,d\eta\sin\zeta\sin\eta.\frac{A\cos\eta+B\cos\zeta+D\cos\zeta\cos\eta+E\sin\zeta\sin\eta}{A\cos\zeta+B\cos\eta+D}.$$

Posons pour abréger

$$A\cos\eta+B\cos\zeta+D\cos\zeta\cos\eta+E\sin\zeta\sin\eta=P,$$
$$A\cos\zeta+B\cos\eta+D=Q,$$

& l'extraction de racine de notre équation donnera

$$d\zeta\sin\eta=\frac{d\eta\sin\zeta.(P+\sqrt{(PP-QQ)})}{Q},$$

ou bien $$\frac{d\zeta\sin\eta}{d\eta\sin\zeta}=\frac{P+\sqrt{(PP-QQ)}}{Q}.$$

Or

Or, puisque $\dfrac{P + Q + \sqrt{(PP - QQ)}}{P - Q + \sqrt{(PP - QQ)}} = \dfrac{\sqrt{(P + Q)}}{\sqrt{(P - Q)}}$, notre équation ſera réduite à cette forme moins embarraſſée:

$$\frac{d\zeta \sin\eta + d\eta \sin\zeta}{d\zeta \sin\eta - d\eta \sin\zeta} = \frac{\sqrt{(P + Q)}}{\sqrt{(P - Q)}}.$$

12. Puisque les variables ζ & η ſont encore extrèmement mêlées enſemble, pour voir plus clair, faiſons ces ſubſtituons

$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\zeta = p$, & $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\eta = q$, pour avoir $\dfrac{d\zeta}{\sin\zeta} = \dfrac{dp}{p}$, & $\dfrac{d\eta}{\sin\eta} = \dfrac{dq}{q}$, & notre équation prendra cette formule:

$$\frac{q\,dp + p\,dq}{q\,dp - p\,dq} = \sqrt{\frac{P + Q}{P - Q}}$$

Or il y a

$$P + Q = (A + B)(\cos\zeta + \cos\eta) + D(\cos\zeta\cos\eta + 1) + E\sin\zeta\sin\eta, \ \&$$
$$P - Q = (A + B)(\cos\zeta - \cos\eta) + D(\cos\zeta\cos\eta - 1) + E\sin\zeta\sin\eta.$$

Mais, ayant en vertu de notre ſubſtitution:

$$\sin\tfrac{1}{2}\zeta = \frac{p}{\sqrt{(1 + pp)}}; \quad \cos\tfrac{1}{2}\zeta = \frac{1}{\sqrt{(1 + pp)}};$$
$$\sin\tfrac{1}{2}\eta = \frac{q}{\sqrt{(1 + qq)}}; \quad \sin\tfrac{1}{2}\eta = \frac{1}{\sqrt{(1 + qq)}},$$

nous en tirons:

$$\sin\zeta = \frac{2p}{1 + pp}; \quad \cos\zeta = \frac{1 - pp}{1 + pp}; \quad \sin\eta = \frac{2q}{1 + qq}; \quad \cos\eta = \frac{1 - qq}{1 + qq},$$

& il reſte à ſubſtituer ces valeurs dans les formules de $P + Q$ & $P - Q$.

13. Or

13. Or ces ſubſtitutions donnent:

$$\cos\zeta + \cos\eta = \frac{1-pp}{1+pp} + \frac{1-qq}{1+qq} = \frac{2-2ppqq}{(1+pp)(1+qq)},$$

$$\cos\zeta\cos\eta + 1 = \frac{(1-pp)(1-qq)}{(1+pp)(1+qq)} + 1 = \frac{2+2ppqq}{(1+pp)(1+qq)},$$

$$\sin\zeta\sin\eta = \frac{4pq}{(1+pp)(1+qq)}.$$

$$\cos\eta - \cos\zeta = \frac{1-qq}{1+qq} - \frac{1+pp}{1+pp} = \frac{2pp-2qq}{(1+pp)(1+qq)},$$

$$\cos\zeta\cos\eta - 1 = \frac{(1-pp)(1-qq)}{(1+pp)(1+qq)} - 1 = \frac{-2pp-2qq}{(1+pp)(1+qq)},$$

De là nous tirons

$$\frac{P+Q}{P-Q} = \frac{(A+B)(1-ppqq)+D(1+ppqq)+2Epq}{(A-B)(pp-qq)-D(pp+qq)+2Epq},$$

où il arrive fort à propos, que le numérateur eſt une fonction de pq, & le dénominateur une fonction homogene de deux dimenſions de p & q.

14. Cette belle propriété nous engage à cette ſubſtitution $pq = r$, & $\frac{p}{q} = s$, de ſorte que $pp = rs$, & $qq = \frac{r}{s}$; & de là nous aurons

$$\frac{P+Q}{P-Q} = \frac{(A+B)(1-rr)+D(1+rr)+2Er}{(A-B)(ss-1)-D(ss+1)+2Es}\cdot\frac{1}{qq},$$

ou bien

$$\frac{P+Q}{P-Q} = \frac{s}{r}\cdot\frac{A+B+D+2Er-(A+B-D)rr}{B-A-D+2Es-(B-A+D)ss}$$

 Or

Or les mêmes ſubſtitutions fourniſſent

$$qdp + pdq = dr, \quad qdp - pdq = qqds = \frac{rds}{s},$$

$$\text{donc } \frac{qdp + pdq}{qdp - pdq} = \frac{sdr}{rds}:$$

Par conſéquent, nous obtiendrons par ce moyen cette équation ſéparée

$$\frac{dr}{\sqrt{((A + B + D)r + 2Err - (A + B - D)r^3)}} =$$

$$\frac{ds}{\sqrt{((B - A - D)s + 2Ess - (B - A + D)s^3)}},$$

laquelle pouvant être conſtruite par des quadratures, ou même par des arcs de ſections coniques, elle fournit la conſtruction de la courbe cherchée.

15. Ayant ainſi réuſſi à trouver une équation différentielle ſéparée pour la courbe décrite par le corps M, je ne m'arrêterai pas à déterminer la loi du mouvement. On n'a qu'à prendre l'une ou l'autre des équations du §. 7. & en tirer la valeur du tems t. En faiſant le calcul, qui pourroit paroitre d'abord fort ennuyant, mais qui ſe réduit à la fin à une belle ſimplicité, on trouve

$$\frac{dt\sqrt{2g}}{a\sqrt{a}} = \frac{dr\sqrt{r}}{(1-r)^2\sqrt{(A+B+D+2Er-(A+B-D)rr)}}$$

$$+ \frac{ds\sqrt{s}}{(1+s)^2\sqrt{(B-A-D+2Es-(B-A+D)ss)}}.$$

Au reſte les deux lettres D & E marquent des quantités conſtantes, qui dépendent du mouvement qui aura été imprimé au corps dans le commencement. D'où il eſt clair que, ſelon les diverſes valeurs de ces deux lettres D & E, les courbes décrites peuvent varier à l'infini, dont la plupart ſeront ouvertement des courbes tranſcendantes, cependant il y en a auſſi d'algébriques, comme nous le verrons bientôt.

QUA-

QUATRIEME ARTICLE.

16. Il s'agit donc de déterminer les cas, ou les valeurs des constantes D & E, où le rapport des quantités r & s, puisse être exprimé par une équation algébrique. Or le rapport de leurs différentiels étant

$$\frac{dr}{\sqrt{((A + B + D)r + 2Err - (A + B - D)r^3)}} = \frac{ds}{((B - A - D)s + 2Ess - (B - A + D)s^3)},$$

je le représenterai pour abréger en sorte

$$\frac{dr}{\sqrt{(\alpha r + 2Err + \beta r^3)}} = \frac{ds}{\sqrt{(\gamma s + 2Ess + \delta s^3)}},$$

de sorte que

$$\alpha = A+B+D;\ \beta = D-A-B;\ \gamma = B-A-D;\ \delta = A-B-D,$$

où j'observe que, s'il étoit $\alpha = \gamma$, & $\beta = \delta$, le rapport entre r & s pourroit être exprimé algébriquement. Mais ce cas ne sauroit avoir lieu, à moins qu'il ne fût $A = 0$, & $D = 0$, ce qui est le cas où le corps M seroit attiré au seul centre B, qui est déjà très connu d'ailleurs.

17. Mais cette ressemblance des dénominateurs peut avoir lieu plus généralement $r = mx$, & $s = ny$, pour avoir:

$$\frac{dx\sqrt{m}}{\sqrt{(\alpha x + 2Emxx + \beta mmx^3)}} = \frac{dy\sqrt{n}}{\sqrt{(\gamma y + 2Enyy + \delta nny^3)}},$$

ou bien

$$\frac{dx\sqrt{\gamma m}}{\sqrt{(\alpha\gamma x + 2E\gamma mxx + \beta\gamma mmx^3)}} = \frac{dy\sqrt{\alpha n}}{\sqrt{(\alpha\gamma y + 2E\alpha nyy + \alpha\delta nny^3)}}.$$

Maintenant les dénominateurs seront semblables, si $\gamma m = \alpha n$, & $\beta\gamma mm = \alpha\delta nn$, ou $\alpha\alpha\beta\gamma = \alpha\gamma\gamma\delta$, donc $\alpha\beta = \gamma\delta$, & partant $DD - (A + B)^2 = DD - (B - A)^2$, d'où il s'ensuit

s'enſuit, ou $A = 0$, ou $P = 0$, ce qui encore eſt le cas où le corps eſt attiré vers un ſeul centre de force, & qui n'a aucune difficulté, puiſque la courbe eſt toujours une ſection conique. D'où il ſemble, que d'autres cas ne ſont pas poſſibles.

18 Cette conſéquence eſt auſſi juſte, tant que la conſtante E n'eſt pas zéro. Mais, dès que nous prenons $E = 0$, pour la reſſemblance des dénominateurs, il ſuffit qu'il ſoit $\beta\gamma mm = \alpha\delta nn$. Soit donc $E = 0$; $mm = \alpha\delta k$, & $nn = \beta\gamma k$, ou bien $r = x\sqrt{\alpha\delta k}$, & $s = y\sqrt{\beta\gamma k}$; & l'équation à réſoudre aura cette forme

$$\frac{dx\sqrt[4]{\alpha\gamma\gamma\delta k}}{\sqrt{(\alpha\gamma x + \alpha\beta\gamma\delta k x^3)}} = \frac{dy\sqrt[4]{\alpha\alpha\beta\gamma k}}{\sqrt{(\alpha\gamma y + \alpha\beta\gamma\delta k y^3)}},$$

ou $$\frac{dx\sqrt[4]{\gamma\delta}}{\sqrt{(x + \beta\delta k x^3)}} = \frac{dy\sqrt[4]{\alpha\beta}}{\sqrt{(y + \beta\delta k y^3)}},$$

où les dénominateurs ſont ſemblables; ce qui eſt une condition requiſe pour rendre le rapport algébrique. Mais il faut outre cela que les coëfficiens des numérateurs aient un rapport rationnel, lequel étant poſé comme μ à ν nous aurons $\gamma\delta : \alpha\beta = \mu^4 : \nu^4$, & partant $DD - (A - B)^2 ; \; DD - (A + B)^2 = \mu^4 ; \; \nu^4$.

19. Je dis donc que, toutes les fois que la conſtante E évanouit, & que $DD = \frac{\mu^4 (A + B)^2 - \nu^4 (A - B)^2}{\mu^4 - \nu^4}$, ou bien $E = 0$, & $DD = AA + BB + \frac{2AB(\mu^4 + \nu^4)}{\mu^4 + \nu^4}$, les lettres μ & ν ſignifiant des nombres entiers; dans tous ces cas je dis que la courbe décrite par le corps M ſera algébrique. Car, poſant $k = \frac{1}{\beta\delta} h$, & partant

$$r = x\sqrt{\frac{D + A + B}{D - A - B} h}, \quad \& \quad s = y\sqrt{\frac{D + A - B}{D - A + B} h},$$

notre

notre équation à résoudre sera

$$\frac{\mu\, dx}{\sqrt{(x + hx^3)}} = \frac{\nu\, dy}{\sqrt{(y + hy^3)}},$$

de laquelle j'ai démontré ailleurs, que son intégrale & même la complette, est algébrique. Mais cette intégrale sera d'autant plus compliquée, plus le rapport des nombres μ & ν est composé. Or cela mérite d'être developpé plus en détail.

20. Rien n'empêche qu'on ne mette $h = 1$; car, quand même les quantités x & y deviendroient imaginaires, en remontant aux quantités primitives ζ, η, ou v, u, il n'en résultera aucun inconvénient, & la réalité y sera toujours rétablie. Or, ayant trouvé l'intégrale de cette équation $\frac{\mu\, dx}{\sqrt{(x + x^3)}} = \frac{\nu\, dy}{\sqrt{(y + y^3)}}$, & prenant $D = \sqrt{\left(AA + BB + \frac{2AB(\mu^4 + \nu^4)}{\mu^4 - \nu^4}\right)}$, on n'a qu'à substituer dans l'intégrale

$$x\sqrt{\frac{D+A+B}{D-A-B}} = r = pq = \tang \tfrac{1}{2}\zeta \tang \tfrac{1}{2}\eta = \frac{\sin\zeta \sin\eta}{(1+\cos\zeta)(1+\cos\eta)} = \sqrt{\frac{(1-\cos\zeta)(1-\cos\eta)}{(1+\cos\zeta)(1+\cos\eta)}},$$

$$y\sqrt{\frac{D+A-B}{D-A+B}} = s = \frac{p}{q} = \tang \tfrac{1}{2}\zeta \cot \tfrac{1}{2}\eta = \frac{\sin\zeta \sin\eta}{(1+\cos\zeta)(1-\cos\eta)} = \sqrt{\frac{(1-\cos\zeta)(1+\cos\eta)}{(1+\cos\zeta)(1-\cos\eta)}},$$

pour arriver à l'équation algébrique de la courbe décrite. Il ne s'agit donc que de trouver l'intégrale de l'équation

$$\frac{\mu\, dx}{\sqrt{(x + x^3)}} = \frac{\nu\, dy}{\sqrt{(y + y^3)}},$$

&

& pour cet effet il faut commencer par le cas $\mu = \nu = 1$, & de là monter succeſſivement à des plus grands nombres.

Intégration de l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{(x + x^3)}} = \frac{dy}{\sqrt{(y + y^3)}}.$$

21. Au défaut d'une méthode directe de trouver le rapport entre les variables x, & y, je me ſervirai de la même méthode indirecte, que j'ai expliquée autrefois en ſuppoſant l'intégrale

$$0 = \mathfrak{A} + 2\mathfrak{B}(x+y) + \mathfrak{C}(xx+yy) + 2\mathfrak{D}xy + 2\mathfrak{E}xy(x+y) + \mathfrak{F}xxyy,$$

dont l'extraction de racine donne:

$$x = \frac{-\mathfrak{B} - \mathfrak{D}y - \mathfrak{E}yy + \sqrt{((\mathfrak{B}+\mathfrak{D}y+\mathfrak{E}yy)^2 - (\mathfrak{A}+2\mathfrak{B}y+\mathfrak{C}yy)(\mathfrak{C}+2\mathfrak{E}y+\mathfrak{F}yy))}}{\mathfrak{C}+2\mathfrak{E}y+\mathfrak{F}yy},$$

$$y = \frac{-\mathfrak{B} - \mathfrak{D}x - \mathfrak{E}xx - \sqrt{((\mathfrak{B}+\mathfrak{D}x+\mathfrak{E}xx)^2 - (\mathfrak{A}+2\mathfrak{B}x+\mathfrak{C}xx)(\mathfrak{C}+2\mathfrak{E}x+\mathfrak{F}xx))}}{\mathfrak{C}+2\mathfrak{E}x+\mathfrak{F}xx}.$$

Donc, poſant pour abréger les formules irrationelles:

$$\sqrt{((\mathfrak{B}+\mathfrak{D}x+\mathfrak{E}xx)^2 - (\mathfrak{A}+2\mathfrak{B}x+\mathfrak{C}xx)(\mathfrak{C}+2\mathfrak{E}x+\mathfrak{F}xx))} = \mathrm{X},$$
$$\sqrt{((\mathfrak{B}+\mathfrak{D}y+\mathfrak{E}yy)^2 - (\mathfrak{A}+2\mathfrak{B}y+\mathfrak{C}yy)(\mathfrak{C}+2\mathfrak{E}y+\mathfrak{F}yy))} = \mathrm{Y},$$

nous aurons:

$$\mathfrak{B} + \mathfrak{D}x + \mathfrak{E}xx + \mathfrak{C}y + 2\mathfrak{E}xy + \mathfrak{F}xxy = -\mathrm{X}, \quad \&$$
$$\mathfrak{B} + \mathfrak{D}y + \mathfrak{E}yy + \mathfrak{C}x + 2\mathfrak{E}xy + \mathfrak{F}xyy = \mathrm{Y}.$$

22. Or l'équation ſuppoſée étant différentiée donne

$$\left.\begin{array}{l} + dx(\mathfrak{B} + \mathfrak{C}x + \mathfrak{D}y + 2\mathfrak{E}xy + \mathfrak{E}yy + \mathfrak{F}xyy) \\ + dy(\mathfrak{B} + \mathfrak{C}y + \mathfrak{D}x + 2\mathfrak{E}xy + \mathfrak{E}xx + \mathfrak{F}xxy) \end{array}\right\} = 0,$$

laquelle, en introduiſant les valeurs irrationelles X & Y, ſe change en cette forme

$$\mathrm{Y}dx - \mathrm{X}dy = 0, \quad \text{ou bien } \frac{dx}{\mathrm{X}} = \frac{dy}{\mathrm{Y}}.$$

Voilà

Voilà donc une équation différentielle entre x & y, où les variables sont séparées, & dont l'intégrale est précisément l'équation algébrique supposée. Cette équation est aussi infiniment plus générale que la proposée, & on voit bien que celle-ci y est comprise.

23. Donc, pour rendre les formules X & Y semblables aux proposées $\surd(x + x^3)$, & $\surd(y + y^3)$, les coëfficiens $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, &c. doivent être déterminés en sorte qu'il devienne:

$$\mathfrak{B}\mathfrak{B}-\mathfrak{A}\mathfrak{C}=0;\quad \mathfrak{E}\mathfrak{E}-\mathfrak{C}\mathfrak{F}=0,\quad \&\ \mathfrak{D}\mathfrak{D}-2\mathfrak{B}\mathfrak{E}-\mathfrak{A}\mathfrak{F}-\mathfrak{C}\mathfrak{C}=0.$$

Donc $\mathfrak{B}=\surd\mathfrak{A}\mathfrak{C}$; $\mathfrak{E}=\surd\mathfrak{C}\mathfrak{F}$, $\mathfrak{D}\mathfrak{D}=\mathfrak{C}\mathfrak{C}+\mathfrak{A}\mathfrak{F}+2\mathfrak{C}\surd\mathfrak{A}\mathfrak{F}$, ou $\mathfrak{D}=\pm(\mathfrak{C}+\surd\mathfrak{A}\mathfrak{F})$. De là nous aurons:

$$X=\surd(2x(\mathfrak{B}\mathfrak{D}-\mathfrak{A}\mathfrak{E}-\mathfrak{B}\mathfrak{C})+2x^3(\mathfrak{D}\mathfrak{E}-\mathfrak{C}\mathfrak{E}-\mathfrak{B}\mathfrak{F})),\quad \text{ou}$$

$$X=\surd(2x(\mathfrak{D}\surd\mathfrak{A}\mathfrak{C}-\mathfrak{A}\surd\mathfrak{C}\mathfrak{F}-\mathfrak{C}\surd\mathfrak{A}\mathfrak{C})+2x^3(\mathfrak{D}\surd\mathfrak{C}\mathfrak{F}-\mathfrak{F}\surd\mathfrak{A}\mathfrak{C}-\mathfrak{C}\surd\mathfrak{C}\mathfrak{F})),$$

qui se réduit à cette forme:

$$X=\surd 2(\mathfrak{D}\surd\mathfrak{C}-\surd\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{F}-\mathfrak{C}\surd\mathfrak{C})(x\surd\mathfrak{A}+x^3\surd\mathfrak{F}).$$

Il faut donc prendre $\mathfrak{D}=-\mathfrak{C}-\surd\mathfrak{A}\mathfrak{F}$, pour avoir:

$$X=2\surd-(\surd\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{F}+\mathfrak{C}\surd\mathfrak{C})(x\surd\mathfrak{A}+x^3\surd\mathfrak{F},\quad \&$$

$$Y=2\surd-(\surd\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{F}+\mathfrak{C}\surd\mathfrak{C})(y\surd\mathfrak{A}+y^3\surd\mathfrak{F},$$

24. Posons donc $\mathfrak{F}=\mathfrak{A}$, & nous aurons

$$\mathfrak{D}=-\mathfrak{A}-\mathfrak{C};\quad \mathfrak{B}=\surd\mathfrak{A}\mathfrak{C},\quad \&\ \mathfrak{E}=\surd\mathfrak{A}\mathfrak{C},$$

& partant

$$X=2\surd-(\mathfrak{A}+\mathfrak{C})(x+x^3)\surd\mathfrak{A}\mathfrak{C},$$

$$Y=2\surd-(\mathfrak{A}+\mathfrak{C}(y+y^3)\surd\mathfrak{A}\mathfrak{C},$$

d'où notre équation intégrable sera

$$\frac{dx}{\surd(x+x^3)}=\frac{dy}{\surd(y+y^3)},$$

dont l'intégrale est exprimée en sorte:

$$0=\mathfrak{A}+2(x+y)\surd\mathfrak{A}\mathfrak{C}+\mathfrak{C}(xx+yy)-2(\mathfrak{A}+\mathfrak{C})xy+2xy(x+y)\surd\mathfrak{A}\mathfrak{C}+\mathfrak{A}xxyy.$$

Ou posons $\mathfrak{C} = 1$, & $\mathfrak{A} = nn$, pour avoir:

$$0 = nn + 2n(x+y) + xx + yy - 2(1+nn)xy + 2nxy(x+y) + nnxxyy,$$

laquelle contenant la constante arbitraire, n, doit être censée l'intégrale complette de l'équation différentielle proposée.

25. Soit $n = -m$; pour avoir:

$\mathfrak{A} = mm$; $\mathfrak{B} = -m$; $\mathfrak{C} = 1$; $\mathfrak{D} = -1-mm$; $\mathfrak{E} = -m$; & $\mathfrak{F} = mm$,

de sorte que l'équation intégrale soit:

$$0 = mm - 2m(x+y) + xx + yy - 2(1+mm)xy - 2mxy(x+y) + mmxxyy,$$

d'où nous concluons:

$$x = \frac{m + (1+mm)y + myy + 2\sqrt{(m+m^3)(y+y^3)}}{1 - 2my + mmyy}, \text{ \&}$$

$$y = \frac{m + (1+mm)x + mxx - 2\sqrt{(m+m^3)(x+x^3)}}{1 - 2mx + mmxx}.$$

On pourra donc exprimer algébriquement tant x par y, que y par x, pour satisfaire à l'équation différentielle proposée

$$\frac{dx}{\sqrt{(x+x^3)}} = \frac{dy}{\sqrt{(y+y^3)}},$$

où je remarque que, posant $y = 0$, on aura $x = m$; & si $x = 0$, on aura $y = m$.

26. Que $\Pi.x$ marque l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+x^3)}}$ prise en sorte, qu'elle évanouisse au cas $x = 0$, de sorte que $\Pi.x$ indique une fonction déterminée de x, mais transcendante. De même maniere soit $\Pi.y = \int \frac{dy}{\sqrt{(y+y^3)}}$, prenant cette intégrale en sorte que, posant $y = 0$, elle évanouisse; & l'intégrale de notre équation différentielle pourra être représentée de cette façon:

$$\Pi.x = \Pi.y - \Pi.m,$$

puis-

puisque, si l'on met $x = 0$, il devient $y = m$. Et cette équation finie, quoique transcendante, doit être censée équivalente à l'équation algébrique entre x & y. Donc, pour qu'il soit $\Pi.y = \Pi.x + \Pi.m$, il faut prendre

$$y = \frac{(m + x)(1 + mx) - 2\sqrt{(m + m^3)(x + x^3)}}{(1 - mx)^2}.$$

Intégration de l'équation

$$\frac{2dx}{\sqrt{(x + x^3)}} = \frac{dy}{\sqrt{(y + y^3)}}.$$

27. En employant les fonctions transcendantes expliquées, nous venons de voir, que l'égalité $\Pi.q = \Pi.p + \Pi.m$, répond à cette équation:

$$q = \frac{(m + p)(1 + mp) - 2\sqrt{(m + m^3)(p + p^3)}}{(1 - mp)^2}.$$

Donc, posant $m = p$, pour qu'il soit $\Pi.q = 2\Pi.p$, nous aurons

$$q = \frac{2p(1 + pp) - 2\sqrt{(p + p^3)^2}}{(1 - pp)^2},$$

où il est évident, qu'il faut changer de signe le radical, comme étant ambigu en soi-même: & partant $q = \frac{4p(1 + pp)}{(1 - pp)^2}$. Posons maintenant $\Pi.r = \Pi.q + \Pi.m$, & nous aurons

$$r = \frac{(m + q)(1 + mq) + 2\sqrt{(m + m^3)(q + q^3)}}{(1 - mq)^2},$$

ce qui sera le rapport qui convient à cette égalité $\Pi.r = 2\Pi.p + \Pi.m$, prenant $q = \frac{4p(1 + pp)}{(1 - pp)^2}$.

28. Ou

28. Ou bien, ſans nous embarraſſer de l'extraction de racine, l'égalité $\Pi.q = \Pi.p + \Pi.m$ demande cette équation

$$0 = mm - 2m(p+q) + pp + qq - 2(1+mm)pq - 2mpq(p+q) + mmppqq,$$

qui ſe réduit à cette forme

$$(m + mpq - p - q)^2 = 4(1 + mm)pq.$$

Faiſons maintenant $m = p$, & l'égalité $\Pi.q = 2\Pi.p$, renferme cette équation $q(1 - pp)^2 = 4p(1 + pp)$, & prenant outre cela $(m + mqr - q - r)^2 = 4(1 + mm)qr$, l'équation entre p & r convient à cette égalité $\Pi.r = 2\Pi.p + \Pi.m$, Or, puiſque m marque une conſtante quelconque, cette égalité eſt l'intégrale complette de cette équation:

$$\frac{dr}{\sqrt{(r + r^3)}} = \frac{2\,dp}{\sqrt{(p + p^3)}}.$$

29. Ecrivons maintenant x pour p, & y pour r, pour avoir l'équation différentielle propoſée $\frac{2\,dx}{\sqrt{(x + x^3)}} = \frac{dy}{\sqrt{(y + y^3)}}$; & il eſt clair que le rapport entre x & y eſt algébrique, & exprimé par ces équations:

$$y = \frac{(m + q)(1 + mq) + 2\sqrt{(m + m^3)(q + q^3)}}{(1 - mq)^2},$$

$$\&\quad q = \frac{4x(1 + xx)}{(1 - xx)^2},$$

ou, en remettant pour q cette valeur, on aura

$$y = \frac{(m(1-xx)^2 + 4x(1+xx)((1-xx)^2 + 4mx(1+xx)) + 4(1-xx)(1+6xx+x^4)\sqrt{(m+m^3)(x+x^3)}}{((1-xx)^2 - 4mx(1+xx))^2}$$

Ou conſervant la lettre $q = \frac{4x(1 + xx)}{(1 - xx)^2}$, l'équation intégrale ſera

$$0 = (y - q)^2 - 2m(1 + qy)(q + y) + mm(1 - qy)^2,$$

qui eſt en même tems complette.

Inté-

Intégration de l'équation.

$$\frac{3\,dx}{\sqrt{(x + x^3)}} = \frac{dy}{\sqrt{(y + y^3)}}.$$

30. Posons $\Pi.z = 2\,\Pi.x + \Pi.m$, & nous venons de voir que le rapport algébrique entre x & z est exprimé en sorte:

$$z = \frac{(m + p)(1 + mp) + 2\sqrt{(m + m^3)(p + p^3)}}{(1 - mp)^2},$$

$$\text{prenant } p = \frac{4x(1 + xx)}{(1 - xx)^2}.$$

Soit maintenant $m = x$, ou $\Pi.z = 3\,\Pi.x$, & on aura

$$z = \frac{(x + p)(1 + px) + 2\sqrt{(p + p^3)(x + x^3)}}{(1 - px)^2},$$

$$\text{prenant } p = \frac{4x(1 + xx)}{(1 - xx)^2}.$$

Faisons de plus $\Pi.y = \Pi.z + \Pi.m = 3\,\Pi.x + \Pi.m$, & nous aurons:

$$y = \frac{(m + z)(1 + mz) + 2\sqrt{(m + m^3)(z + z^3)}}{(1 - mz)^2},$$

31. Donc, puisque cette égalité est l'intégrale complette de l'équation différentielle proposée $\frac{3\,dx}{\sqrt{(x + x^3)}} = \frac{dy}{\sqrt{(y + y^3)}}$; le rapport entre x & y sera exprimé algébriquement en sorte

$$v = \frac{4x(1 + xx)}{(1 - xx)^2},$$

$$q = \frac{(p + x)(1 + px) + 2\sqrt{(p + p^3)(x + x^3)}}{(1 - px)^2},$$

$$y = \frac{(m + q)(1 + mq) + 2\sqrt{(m + m^3)(q + q^3)}}{(1 - mq)^2},$$

où

où il faut remarquer que, substituant la valeur de p, on aura

$$q = \frac{x(3 + 6xx - x^4)^2}{(1 - 6xx - 3x^4)^2}.$$

Intégration de l'équation

$$\frac{4dx}{\sqrt{(x + x^3)}} = \frac{dy}{\sqrt{(y + y^3)}}.$$

32. En poursuivant la même méthode, le rapport entre les variables x & y sera exprimé par les équations algébriques suivantes :

$$p = \frac{4x(1 + xx)}{(1 - xx)},$$

$$q = \frac{(p + x)(1 + px) + 2\sqrt{(p + p^3)(x + x^3)}}{(1 - px)^2},$$

$$r = \frac{(q + x)(1 + qx) + 2\sqrt{(q + q^3)(x + x^3)}}{(1 - qx)^2},$$

$$y = \frac{(m + r)(1 + mr) + 2\sqrt{(m + m^3)(r + r^3)}}{(1 - mr)^2},$$

d'où il est évident, comme il faut continuer ces intégrations pour toutes les formules $\frac{\mu dx}{\sqrt{(x + x^3)}} = \frac{dy}{\sqrt{(y + y^3)}}$, où μ marque un nombre entier quelconque.

Intégration de l'équation

$$\frac{\mu dx}{\sqrt{(x + x^3)}} = \frac{\nu dy}{\sqrt{(y + y^3)}}.$$

33. Qu'on cherche premierement par la méthode précédente les intégrales de ces deux égalités

$$\frac{\mu dx}{\sqrt{(x+x^3)}} = \frac{dz}{\sqrt{(z+z^3)}}, \quad \& \quad \frac{\nu dy}{\sqrt{(y+y^3)}} = \frac{dz}{\sqrt{(z+z^3)}},$$

où

où il suffit de prendre l'une complette, & de supposer dans l'autre la constante $= 0$. Alors, ayant le rapport entre x & z, & entre y & z, on n'a qu'à éliminer z, pour avoir la rélation requise entre x & y, ce qui se fera aisément, puisque l'une & l'autre intégration donne une valeur pour z, l'une par x & l'autre par y, & ces deux valeurs étant égalées entr'elles donnent d'abord l'équation cherchée.

CONCLUSION.

34. Voilà donc une solution parfaite du probleme que je me suis proposé, d'où il est clair que, parmi toutes les courbes possibles, que le corps M puisse décrire étant sollicité vers deux centres de forces, il y en a une infinité qui sont algébriques. Cela arrive toutes les fois qu'il y a dans la solution générale, $E = 0$, & l'autre constante $D = \sqrt{\frac{\mu^4 (A + B)^2 - \nu^4 (A - B)^2}{\mu^4 - \nu^4}}$, les lettres μ & ν marquant des nombres entiers quelconques. Dans ces cas on n'a qu'à chercher l'intégrale de l'égalité $\frac{\mu dx}{\sqrt{(x + x^3)}} = \frac{\nu dy}{\sqrt{(y + y^3)}}$, qui sera toujours algébrique, comme je viens de le faire voir, & ensuite posant

$$x = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \zeta \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \eta . \sqrt{\frac{D - A - B}{D + A + B}}, \quad \&$$

$$y = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \zeta \cot \tfrac{1}{2} \eta . \sqrt{\frac{D - A + B}{D + A - B}},$$

on aura une équation algébrique entre $\operatorname{tang} \frac{1}{2} \zeta$, & $\operatorname{tang} \frac{1}{2} \eta$, d'où l'on tirera ensuite aisément une entre les coordonnées AP & PM.